

Bài 1. Cho hai biểu thức $A = \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} - 1$ và $B = \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$.

1. Tìm tất cả các giá trị của x sao cho A nhận giá trị nguyên.
2. Rút gọn biểu thức $P = A : B$.
3. Tìm tất cả các giá trị của x để $P < 1$.

Bài 2. Cùng một thời điểm, một chiếc ô tô, gọi là X_A , xuất phát từ thành phố A đi về hướng thành phố B và một chiếc ô tô khác, gọi là X_B , xuất phát từ thành phố B đi về hướng thành phố A . Chúng chuyển động với vận tốc riêng không đổi và gặp nhau tại một điểm C (nằm giữa quãng đường AB) cách A 20km, rồi tiếp tục hành trình của mình. Cả hai xe, sau khi đến B và A tương ứng, lập tức quay trở lại và gặp nhau lần thứ hai tại một điểm D trên quãng đường AB . Biết thời gian xe X_B đi từ D đến B là 10 phút và thời gian giữa hai lần gặp nhau là 1 giờ. Hãy tính vận tốc của từng xe.

Bài 3. Cho đường thẳng $d : y = 2x - a^2$ và parabol $\mathcal{P} : y = ax^2$ (a là tham số dương).

1. Tìm a để d cắt \mathcal{P} tại hai điểm phân biệt A, B . Khi đó, chứng minh rằng A, B đều nằm về bên phải của trục tung.
2. Gọi x_1, x_2 tương ứng là hoành độ của A, B . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{4}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_1 x_2}$.

Bài 4. Cho đường tròn tâm O , bán kính R . Từ một điểm C ở ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến CA, CB đến đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Một đường thẳng Δ đi qua C , cắt (O) tại hai điểm M, N phân biệt (M nằm giữa C và N). Đường thẳng AB tương ứng cắt các đường thẳng OC và MN tại H và K . Gọi I là trung điểm MN .

1. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, O và I cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh rằng $CM \cdot CN = CI \cdot CK$.
3. Tiếp tuyến tại M của (O) tương ứng cắt CA và CB tại E và F . Đường thẳng vuông góc với CO tại O tương ứng cắt CA và CB tại P và Q . Chứng minh rằng khi Δ thay đổi, nhưng luôn cắt (O) tại hai điểm phân biệt, thì tích $PE \cdot QF$ không đổi.
4. Xác định vị trí của M sao cho $\frac{PE + QF}{PQ}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5.

1. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2x + 3y \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{4}{4x^2 + 9y^2} + \frac{9}{xy}.$$

2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq 1, b \geq 4, c \geq 9$. Chứng minh rằng

$$\frac{bc\sqrt{a-1} + ca\sqrt{b-4} + ab\sqrt{c-9}}{abc} \leq \frac{11}{12}$$