NÂNG CAO 2. HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Dạng 1. Tìm điều kiện để hàm số đồng biến, nghịch biến trong một khoảng cho trước

1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(2m+1)x^2+(3m+2)x-5m+2.$

a) Tìm m để hàm số nghịch biến trong khoảng $(0;1)$. *Đs:* $m\le -2.$

b) Tìm m để hàm số nghịch biến trong một khoảng có độ dài lớn hơn 1. *Đs:* $m<1-\sqrt{3};m>1+\sqrt{3}.$

2. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(3m-1)x^2+(m+3)x+4m-3$ đồng biến trong khoảng $(1;+\infty)$. *Đs:* $m\le 1.$

3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-(3m+1)x+5m-1}{x-m}$. Tìm m để hàm số đồng biến trong khoảng $(0;1)$. *Đs:* $m\le 0.$

Dạng 2. Sử dụng tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để giải phương trình, bất phương trình

4. Giải phương trình $\log_3\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-2x+3}=x^2-3x+2.$ *Đs:* $x=1;2.$

5. Giải bất phương trình $\log_5\left(\sqrt{x}+3\right)>\log_4 x.$ *Đs:* $0<x<4.$

Dạng 3. Sử dụng tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để chứng minh bất đẳng thức

6. Chứng minh rằng, với mọi x dương, ta có:

a) $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2.$

b) $e^x>1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n.$

7. Chứng minh rằng, với mọi $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, ta có:

a) $\sin x+\tan x>2x.$

b) $2\sin x+\tan x>3x.$

Bài tập luyện tập

8. Giải các phương trình, bất phương trình sau:

a) $\log_2\sin x=2\log_3\tan x.$

b) $\log_2\dfrac{x^2+3x+5}{2x^2+2x+3}<x^2-x-2.$

9. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x,\forall x>0.$

b) $\cos x+e^x\ge 2+x-\frac{x^2}{2}.$

c) $\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)^b\le\left(2^b+\frac{1}{2^b}\right)^a,\quad a\ge b>0.$