

## VẤN ĐỀ 6. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Quy trình khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

**Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.**

**Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số:**

- a) – Tìm giới hạn: tại vô cực và giới hạn vô cực (nếu có).  
– Tìm các đường tiệm cận (nếu có).
- b) Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm:  
– Tìm đạo hàm của hàm số.  
– Xét dấu đạo hàm. Suy ra chiều biến thiên và tìm cực trị (nếu có).  
– Điền các kết quả vào bảng biến thiên.

**Bước 3:** Tìm khoảng lồi, khoảng lõm, điểm uốn (đối với hàm đa thức).

**Bước 4:**

- Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).
- Tìm một số điểm đặc biệt của đồ thị. Chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ. Trong trường hợp đồ thị không cắt các trục tọa độ hoặc việc tìm tọa độ giao điểm phức tạp thì bỏ qua phần này.
- Nhận xét về đồ thị: Chỉ ra tâm đối xứng, trục đối xứng (nếu có, không yêu cầu chứng minh).

**Dạng 1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số bậc ba**

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ( $C$ ) của hàm số:

$$\text{a) } y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{5}{8}. \quad \text{b) } y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2.$$

**Dạng 2. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số trùng phương**

2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ( $C$ ) của hàm số:

$$\text{a) } y = x^4 - 2x^2 - 3. \quad \text{b) } y = -x^4 - 2x^2 + 3.$$

**Dạng 3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất trên bậc nhất**

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ( $C$ ) của hàm số:

$$\text{a) } y = \frac{2x-1}{x-1}. \quad \text{b) } y = \frac{1-x}{x+2}.$$

**Dạng 4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số bậc hai trên bậc nhất**

4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ( $C$ ) của hàm số:

$$\text{a) } y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}. \quad \text{b) } y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}.$$

**Bài tập luyện tập**

5. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ( $C$ ) của hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 4$ .  
b) Từ đồ thị ( $C$ ) của hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 4$ , biện luận số nghiệm của phương trình  $x^3 + 3x^2 - 4 = m$  theo tham số  $m$ .

- c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn.  
d) Chứng minh điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị.
6. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ .  
b) Tùy theo  $m$ , hãy biện luận số nghiệm của phương trình  $x^3 - 3x^2 + m + 2 = 0$ .
7. a) Khảo sát và vẽ đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ .  
b) Từ đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ , biện luận số nghiệm của phương trình  $x^4 - 2x^2 + m = 0$  theo tham số  $m$ .
8. a) Khảo sát và vẽ đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = \frac{3x+3}{x-2}$ .  
b) Viết phương trình các đường thẳng đi qua  $O$  và tiếp xúc với  $(C)$ .  
c) Tìm tất cả các điểm trên  $(C)$  có tọa độ là các số nguyên.  
d) Chứng minh rằng giao điểm  $I$  của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.
9. Cho hàm số  $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ .  
a) Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.  
b) Tìm  $m$  để đường tiệm cận đứng của đồ thị đi qua  $A(-1; \sqrt{2})$ . *Đáp số:  $m = 2$ .*  
c) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi  $m = 2$ .
10. Cho hàm số  $y = \frac{2x^2 + (6-m)x + 4}{mx + 2}$ .  
a) Tìm  $m$  để đồ thị của hàm số đi qua điểm  $M(-1; 1)$ . *Đáp số:  $m = 1$ .*  
b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi  $m = 1$ .
11. a) Khảo sát và vẽ đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2}$ .  
b) Gọi  $M$  là điểm bất kỳ trên  $(C)$ . Tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $M$  cắt tiệm cận đứng tại  $A$ , tiệm cận xiên tại  $B$ . Chứng minh rằng  
\*  $M$  là trung điểm của  $AB$ .  
\* Tam giác  $IAB$  có diện tích không đổi, với  $I$  là giao điểm của hai tiệm cận. *Hd: Gọi  $M(x_0; y_0) \in (C)$  là tiếp điểm.*