VẤN ĐỀ 5. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

- Đường thẳng $y = y_0$ gọi là *tiệm cận ngang* của hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0.$$

- Đường thẳng $x = x_0$ gọi là *tiệm cận đứng* của hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \text{ hoặc } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

- Đường thẳng $y = ax + b\,(a \neq 0)$ gọi là *tiệm cận xiên* của hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0.$$

- Để xác định các số *a, b* trong phương trình tiệm cận xiên, ta có thể áp dụng công thức:

* Tìm $a = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. * Tìm $b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - ax\right]$.

Hoặc: * Tìm $a = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. * Tìm $b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - ax\right]$.

1. Tìm các tiệm cận đứng và ngang (nếu có) của các hàm số

a) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. b) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$. c) $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2-3x+2}$.

d) $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$. e) $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. g) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+3x+2}{2x+2}$.

2. Tìm các tiệm cận đứng và xiên (nếu có) của các hàm số

a) $y = 2x - 1 + \dfrac{2}{x-1}$. b) $y = \dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}$. c) $y = \dfrac{x^2+x+\sin x}{x}$.

d) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+x-1}$. e) $y = \sqrt{x^2-4x} + 5x$. g) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. Tìm các tiệm cận xiên của các hàm số

a) $y = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$. *Đs:* $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$. b) $y = \sqrt{x^2-1}$. *Đs:* $y = \pm x$.

c) $y = \sqrt{2x^2 - 6x + 4}$. *Đs:* $y = \pm\sqrt{2}\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.

4. Cho $(C_m): y = \dfrac{2x^2 + (m+1)x - 3}{x+m}$.

a) Tìm m để tiệm cận xiên của (C_m) đi qua $A(1;1)$.

b) Tìm m để giao của hai tiệm cận của (C_m) nằm trên $(P): y = x^2 + 3$.

5. (TSĐH, A, 2005) Tìm m để hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu đến tiệm cận xiên của đồ thị hàm số bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$. *Đs:* $m = 1$.

6. Cho $(C): y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 3}$. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ điểm M trên (C) đến hai tiệm cận của (C) bằng một hằng số.

7. Tìm tất cả các điểm M trên đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận nhỏ nhất. *Đs:*

8. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m+2)x - m}{x + 1}, (C_m)$. Tìm m để tiệm cận của (C_m) định trên hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 8. *Đs:*