VẤN ĐỀ 2. TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ BẰNG CÔNG THỨC

Ta thừa nhận một số định lý sau đây :

Định lý 1. $\lim c = c$ với c là hằng số bất kỳ.

Định lý 2. Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[2k+1]{u_n} = \sqrt[2k+1]{L}$. Đặc biệt, nếu $u_n \geq 0, \forall n \geq n_0$ thì $L \geq 0$ và $\lim \sqrt[2k]{u_n} = \sqrt[2k]{L}$.

Định lý 3. Cho $\lim u_n = L_1, \lim v_n = L_2$. Khi đó ta luôn có :

a) $\lim(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha L_1 + \beta L_2$.

b) $\lim(u_n.v_n) = L_1.L_2$.

c) $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L_1}{L_2}$ nếu $L_2 \neq 0$.

Dạng 1. Tìm $\lim u_n$ trong đó $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ với $P(n), Q(n)$ là những đa thức của n

Phương pháp: Chia tử và mẫu cho n^k trong đó k là số mũ cao nhất của cả tử và mẫu (tương đương với việc rút n^k của cả tử và mẫu làm nhân tử) sau đó áp dụng các định lý về giới hạn.

1. Tìm $\lim u_n$ biết

a) $u_n = \dfrac{3n-1}{2n^2+4n+3}$.

b) $u_n = \dfrac{-3n^3+2n^2+1}{5n^3+3n^2-n-1}$.

c) $u_n = \dfrac{3n^4 - 2(-1)^n \cos^n n}{7n^5+1}$.

d) $u_n = \dfrac{2n^2}{n^2+3n+1} - \dfrac{3}{n^2+2n}$.

e) $u_n = \dfrac{2n^4 + (-1)^n \cos^n n}{n^5+1}$

g) $u_n = \dfrac{-3n^3+2n^2+1}{2n^3-n}$

h) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+n+3}$

i) $u_n = \dfrac{2}{n^2+3n} - \dfrac{1}{n^2+2}$

k) $u_n = \dfrac{(n+1)(2n^2+n)-n^2+1}{(n+1)(n^2+2)-3n^3}$

l) $u_n = \dfrac{(2n+1)(n-3)+n}{n^3+n}$

m) $u_n = \dfrac{2n+\cos^{2n} n + \sin^n n}{n+2}$

Dạng 2. Tìm $\lim u_n$ trong đó u_n là biểu thức có chứa n dưới dấu căn

Phương pháp: Đưa n^k ra ngoài dấu căn trong đó k là số mũ cao nhất của n trong dấu căn sau đó áp dụng các định lý về giới hạn. Nếu không áp dụng được (khi gặp dạng $\infty \times 0$ hoặc $\dfrac{0}{0}$) thì phải sử dụng phương pháp nhân liên hợp.

2. Tìm $\lim u_n$ với

a) $u_n = \dfrac{\sqrt{9n^2+2n}+3n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$.

b) $u_n = \dfrac{\sqrt{9n^2+2n}-3n}{\sqrt{n^2+4n}-n}$.

c) $u_n = \sqrt[3]{n^3+n} - n$.

d) $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{2n-n^3}+n}{\sqrt{n^2+2n}-n}$.

e) $u_n=\sqrt{n^2+3n}-n+1$

g) $u_n=\sqrt{4n^2+4n+3}-\sqrt{4n^2+1}$

h) $u_n=\dfrac{\sqrt{4n^2+n}-2n}{n+3}$

i) $u_n=\dfrac{2\sqrt[3]{n^4}-3n+1}{\sqrt[3]{n^4}+2n}$

k) $u_n=2n+\sqrt[3]{n^2-8n^3}$

l) $u_n=n+1-\sqrt{n^2+n}$

m) $u_n=\dfrac{2n-\sqrt{4n^2+n}}{n^3-\sqrt[3]{n^3+n^2}}$

n) $u_n=\dfrac{n(n+\sqrt[3]{(3n-n^3)})}{n-\sqrt{n^2+5n}}$

o) $u_n=2n-\sqrt{9n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}$

p) $u_n=\sqrt{n^2-2n}+2\sqrt[3]{n^3-8n^3}+3\sqrt{n^2+n}$

3. Tìm $\lim u_n$ với

a) $u_n=\dfrac{\sqrt[5]{n^6}+2n-5}{3\sqrt[5]{n^6}+2n-1}$.

b) $u_n=\sqrt{4n^2+3n}-2n.$

c) $u_n=\sqrt{2n^2+2n}-\sqrt{2n^2-1}.$

d) $u_n=\sqrt{4n^2+2n}+\sqrt[3]{n^2-8n^3}.$

e) $u_n=\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n+2$

g) $u_n=\sqrt{4n^2+n}+\sqrt[3]{2n^2-8n^3}$

h) $u_n=\dfrac{\sqrt[3]{2n^2-n^3}+n}{\sqrt{n^2+n}-n}$

i) $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}$

k) $u_n=\dfrac{\sqrt{9n^2-n}-3n+1}{n^2+1}$

l) $u_n=\dfrac{\sqrt{4n^2+n}-3n^2}{n^2+2}$

Dạng 3. Tìm $\lim u_n$ trong đó u_n là phân thức mà tử và mẫu là các biểu thức có chứa lũy thừa dạng $a^n, b^n, \ldots$

4. Tìm $\lim u_n$ với

a) $u_n=\dfrac{3.5^{n+1}-2.4^n+2}{2.5^n+3.6^n}$.

b) $u_n=\dfrac{2.7^{n+2}+3.4^{n+3}-2}{2.7^n+5^{n+3}}$.

c) $u_n=\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots.+b^n}$ với $|a|<1, |b|<1.$

d) $u_n=\dfrac{2+2^2+\ldots+2^n}{3+3^2+\ldots+3^n}$

e) $u_n=\dfrac{2^{2n}-3^{n+7}}{4^n+3^n+1}$

g) $u_n=\dfrac{2^{n+2}-4^{n+1}-3}{2.4^{n+2}+3^{n+7}}$

h) $u_n=\dfrac{2.7^{n+2}-4^{n+3}+1}{7^n+3.5^{n+2}}$

i) $u_n=\dfrac{5^{n+1}-4^n+1}{2.5^n-6^n}$

Dạng 4. Tìm $\lim u_n$ bằng cách áp dụng nguyên lý kẹp

Định lý 4. (Nguyên lý kẹp) Nếu $v_n\le u_n\le w_n, \forall n\ge n_0$ và $\lim v_n=\lim w_n=L$ thì $\lim u_n=L.$

5. Tìm $\lim u_n$ với

a) $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$. *Hướng dẫn:* Chứng tỏ $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le u_n\le 1.$

b) $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^5+k}}$. *Hướng dẫn:* Chứng tỏ $0\le u_n\le\dfrac{1}{n}.$

c) $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$ d) $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+3)}$ e) $u_n=\frac{1}{5^n}\sum_{k=1}^{n}4^k$

g) $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$ h) $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^4+k}}$

6. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\frac{n}{4^n}$. Từ đó suy ra giới hạn của dãy số (v_n) với $v_n=\frac{\sin n+\sin^2 n+\sin^3 n+...+\sin^n n}{4^n}$.

Dạng 5. Tìm $\lim u_n$ với u_n cho bởi hệ thức truy hồi

Phương pháp:

Cách 1. Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy (u_n) từ đó tính được $\lim u_n$.

Cách 2. Sử dụng điều kiện để dãy đơn điệu có giới hạn hữu hạn. Nội dung như sau:

Định lý 5. (Điều kiện để dãy đơn điệu có giới hạn hữu hạn)

a) Một dãy tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.

b) Một dãy giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

7. Tìm $\lim u_n$ với u_n được xác định bởi

a) $\begin{cases} u_1=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}\left(n\in N^*\right). \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1=\sqrt{2} \\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\left(n\in N^*\right). \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_n=-1 \\ u_{n+1}=\frac{nu_n}{2(n+1)}+\frac{3(n+2)}{2(n+1)},\forall n\in N^* \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2},\forall n\in N^* \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_n=10 \\ u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+3,\forall n\in N^* \end{cases}$

Dạng 6. Tính tổng các số hạng của cấp số nhân lùi vô hạn

Phương pháp: Sử dụng công thức $S=\frac{u_1}{1-q}$ trong đó $|q|<1$.

8. Tính tổng

a) $S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-...+\left(-1\right)^n\frac{1}{3^n}+...$ b) $S=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+...+\left(\frac{2}{3}\right)^n+...$

c) $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}+...$

9. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng số thập phân.

a) 0,131313... b) 0,232323… c) 3,214214214…