

VẤN ĐỀ 2. LÔGARIT

Dạng 1. Tính các lôgarit bằng cách sử dụng định nghĩa

• *Khái niệm lôgarit:* Cho $0 < a \neq 1; b > 0$. Số thực x thỏa mãn $a^x = b$ được gọi là *lôgarit cơ số a của b* , ký hiệu là $\log_a b$. Vậy $x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$.

1. Cho trước $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của:

a) $\log_a 1$. *Đáp số:* 0.

b) $\log_a a$. *Đáp số:* 1.

2. Sử dụng định nghĩa lôgarit, tính các giá trị sau:

a) $\log_2 4$. *Đáp số:* 2.

b) $\log_{\frac{1}{4}} 2$. *Đáp số:* $-\frac{1}{2}$.

c) $\log_5 \frac{1}{25}$. *Đáp số:* -2.

d) $\log_{27} 9$. *Đáp số:* $\frac{2}{3}$.

3. Tìm x biết

a) $\log_{0,1} x = -2$. *Đáp số:* 100.

b) $\log_{81} x = \frac{1}{2}$. *Đáp số:* 9.

c) $\log_x 7 = -1$. *Đáp số:* $\frac{1}{7}$.

d) $\log_{\sqrt{x}} 8 = 3$. *Đáp số:* 4.

4. Chứng minh rằng $a^{\log_a b} = b$ và $\log_a a^b = b$. Áp dụng tính giá trị các biểu thức sau đây:

a) $3^{2\log_3 5}$. *Đáp số:* 25.

b) $\log_{\frac{1}{2}} 8$. *Đáp số:* -3.

c) $4^{\log_2 \frac{1}{7}}$. *Đáp số:* $\frac{1}{49}$.

d) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}}$. *Đáp số:* 9.

Dạng 2. Tính lôgarit bằng cách sử dụng các công thức

5. Cho $b_1 = 2^3$, $b_2 = 2^5$. Tính và so sánh kết quả của

a) $\log_2 b_1 + \log_2 b_2$ và $\log_2 (b_1 b_2)$.

b) $\log_2 b_1 - \log_2 b_2$ và $\log_2 \frac{b_1}{b_2}$.

• Cho a, b_1, b_2 thỏa mãn $0 < a \neq 1, b_1 > 0, b_2 > 0$. Khi đó ta có $\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$ và $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$.

6. Tính giá trị các biểu thức sau đây:

a) $\log_6 9 + \log_6 4$. *Đáp số:* 2.

b) $\log_7 49 - \log_7 343$. *Đáp số:* -1.

c) $\log_{\frac{1}{2}} 2 + 2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8}$. *Đáp số:* $2 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$.

7. Tìm x biết rằng:

a) $\log_3 (1-x) = 2$. *Đáp số:* -8.

b) $\log_3 x + \log_9 x = \frac{3}{2}$. *Đáp số:* 3.

- Cho $0 < a \neq 1, b > 0$. Khi đó $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ với mọi số thực α . Từ đó ta có $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$ với mọi số tự nhiên $n \neq 0$ và $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.

8. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\log_2 4^{\frac{1}{7}}$. Đáp số: $\frac{2}{7}$.
 b) $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 15$. Đáp số: $-\frac{1}{2}$.
 c) $\frac{\log_7 16}{\log_7 15 - \log_7 30}$. Đáp số: -4 .
 d) $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 12 + \log_5 50$. Đáp số: 2 .

9. a) Cho $a, b, c, d > 0$. Tính $\log_a \sqrt[7]{\frac{b^2 c^3}{d^4 e^5}}$. Đáp số: $\frac{2}{7} \log_a b + \frac{3}{7} \log_a c - \frac{4}{7} \log_a d - \frac{5}{7} \log_a e$.

b) Cho $b + c > 0, d - e > 0$. Tính $\log_a \sqrt[5]{\frac{(b+c)^2}{(d-e)^3}}$. Đáp số: $\frac{2}{5} \log_a (b+c) - \frac{3}{5} \log_a (d-e)$.

- Cho $0 < a \neq 1, b > 0$. Khi đó $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$ với mọi $0 < c \neq 1$. Từ đó ta có $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$; $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $b \neq 1$ và $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$.

10. Tính giá trị của

- a) $2^{\log_4 15} + 3^{\frac{\log_1 2}{27}}$. Đáp số: $\sqrt{15} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
 b) $\log_{\frac{1}{4}} (\log_3 4 \cdot \log_2 3)$. Đáp số: $-\frac{1}{2}$.

11. Rút gọn biểu thức

- a) $\log_{\frac{1}{3}} 7 + 2 \log_9 49 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{7}$. Đáp số: $\log_3 343$.
 b) $25^{\frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{5}} 27 + \log_{125} 81}$. Đáp số: $\frac{5\sqrt[3]{9}}{81}$.

Dạng 3. So sánh hai lôgarit cùng cơ số

- Cho $0 < a \neq 1, b > 0, c > 0$. Khi đó

- a) Nếu $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.
 b) Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

12. Chứng minh rằng:

- a) Khi $a > 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$.
 b) Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$.
 c) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

13. Các lôgarit sau đây dương hay âm?

- a) $\log_2 5$.
 b) $\log_5 2$.
 c) $\log_{0,2} 0,8$.
 d) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{7}$.

14. So sánh các số sau đây

- a) $\log_3 4$ và $\log_4 \frac{1}{3}$.
 b) $\log_{0,1} \sqrt[3]{2}$ và $\log_{0,2} 0,34$.
 c) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{2}{5}$ và $\log_{\frac{5}{2}} \frac{3}{4}$.
 d) $2^{\log_6 3}$ và $3^{\log_6 \frac{1}{2}}$.

Bài tập tổng hợp

15. Rút gọn biểu thức

a) $M = \left(25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}} \right)^{\frac{1}{2}} - \log_2 \left(\log_2 \sqrt[4]{2} \right)$. Đáp số: 13.

b) $N = 36^{\log_6 5} + 10^{-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$. Đáp số: 24.

16. a) Tìm $\log_{49} 32$ biết $\log_2 14 = a$. Đáp số: $\frac{5}{2(a-1)}$.

b) Tìm $\log_{\sqrt[6]{a}} \sqrt[6]{a}$ biết $\log_a 27 = \frac{1}{2}$. Đáp số: 2.

17. Giả sử các biểu thức đã cho có nghĩa. Chứng minh:

a) $\log_{ax}(bx) = \frac{\log_a b + \log_a x}{1 + \log_a x}$. b) $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^k} x} = \frac{k(k+1)}{2 \log_a x}$.

18. Ký hiệu $\log_{10} x := \lg x$. Hãy tính $A = \lg 9000 + \lg 0,000027 + \frac{1}{\log_{81} 100}$ biết $\lg 3 = 0,477$.

19. Tìm các giá trị của x biết rằng:

a) $\log_2 [x(x-1)] = 1$. Đáp số: $x = -1; x = 2$.

b) $\log_2 x + \log_2 (x-1) = 1$. Đáp số: $x = 2$.

c) $\lg(x^2 - 6x + 7) = \lg(x-3)$. Đáp số: $x = 5$.

d) $\log_4 \left\{ 2 \log_3 [1 + \log_2 (1 + 3 \log_2 x)] \right\} = \frac{1}{2}$. Đáp số: $x = 2$.

20. Tìm các giá trị của x biết rằng:

a) $\log_9 \frac{2x}{x+1} > \frac{1}{2}$. Đáp số: $-3 < x < -1$.

b) $\frac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \frac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$. Hướng dẫn: Đặt $t = \log_2 x$. Đáp số: $x = \frac{1}{16}; x = 2$.

c) $\frac{1}{\log_6 (x+3)} + \frac{2 \log_{\frac{1}{4}} (4-x)}{\log_2 (x+3)} = 1$. Hướng dẫn: Đưa về cơ số 2. Đáp số: $x = 3$.

d) $\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 2^5 \cdot 2^{\frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3 \cdot 3^{\frac{2(1-y)}{y}} \end{cases}$. Đáp số: $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right); (-2; 4)$.