

VẤN ĐỀ 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là đạt *cực đại* tại x_0 nếu $f'(x)$ đổi dấu từ *dương sang âm* khi x đi qua x_0 . Hàm số $y = f(x)$ gọi là đạt *cực tiểu* tại x_0 nếu $f'(x)$ đổi dấu từ *âm sang dương* khi x đi qua x_0 . Hàm số đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 thì gọi chung là đạt *cực trị* tại x_0 .

- Hàm số $y = f(x)$ đạt *cực đại* tại $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$. Hàm số $y = f(x)$ đạt *cực tiểu* tại

$$x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}.$$

1. Với giá trị nào của m để hàm số

a) $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - 1)x + 2$ đạt cực đại tại $x = 2$. *Đáp số:* $m = 11$.

b) $y = (x - m)^3 - 3x$ đạt cực tiểu tại $x = 0$. *Đáp số:* $m = -1$

2. Tìm các điểm cực trị của các hàm số $y = \sin^2 x$. *Đáp số:* $x_{CD} = \frac{\pi}{2} + k\pi, x_{CT} = k\pi$.

3. Tìm các giá trị của m để các hàm số sau có cực trị

a) $y = x^3 - 6x^2 + 3(m^2 + 2)x - m - 6$. *Đáp số:* $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

b) $y = \frac{x^2 - mx - 5}{mx + 1}$. *Đáp số:* $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$.

4. Tìm các giá trị của m để các hàm số $y = x^4 + 2(m - 1)x^2 + m + 5$ có 3 cực trị. *Đáp số:* $m < 1$.

5. Tìm điều kiện cần và đủ để các hàm số sau có cực trị?

a) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$. b) $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}, (am \neq 0)$.

c) $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$.

6. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$ luôn có cực đại và cực tiểu với mọi m .

- Cho hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 . Khi đó:

a) Nếu $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ thì $y_0 = mx_0 + n$ với $y = (ex + g)y' + (mx + n)$.

b) Nếu $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ thì $y(x_0) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$. Hãy áp dụng với hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}, (am \neq 0)$.

7. a) Tìm các hệ số a, b, c sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(1; 0)$ và đạt cực trị bằng 0 tại điểm -2 . *Đáp số:* $a = 3, b = 0, c = -4$.

b) Tìm các hệ số a, b, c, d sao cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại $x = 1, f(1) = 1$. *Đáp số:* $a = -2, b = 3, c = 0, d = 0$.

8. Tìm m để hàm số

a) $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1)$ đạt cực đại tại $x = 1$. *Đáp số:* $m = 2$.

b) $y = \frac{-x^2 - mx - 1}{x + m}$ đạt cực tiểu tại $x = 2$. *Đáp số:*

9. a) Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x + 1}, (C_m)$. Chứng minh rằng với m bất kỳ; đồ thị (C_m) luôn luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

b) $y = \frac{x^2 + mx}{-x + 1}$ có hai cực trị $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ sao cho khoảng cách giữa chúng bằng 10. *Đáp số:* $m > -1, m = 4$.

c) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ có hai điểm cực trị $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ sao cho khoảng cách giữa chúng nhỏ nhất. *Đáp số:* $d_{\min} = \frac{2\sqrt{13}}{3} \Leftrightarrow m = 0$.

d) $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2m^2 - 2$ có hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. *Đáp số:* $m \in (-\infty, -2 - \sqrt{3}) \cup (-2 + \sqrt{3}, +\infty), m \in \{1, 5\}$.

10. Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - x + m$ có hai cực trị và hai giá trị cực trị trái dấu. *Đáp số:* $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$.

b) $y = \frac{x^2 - mx + m - 1}{x + 1}$ có giá trị cực đại, giá trị cực tiểu cùng dấu. *Đáp số:* $0 < m \neq 2$.

c) $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$ đạt cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1. *Đáp số:* $m < 1$.

d) $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-2)x^2 + (5m+4)x + m^2 + 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 < -1 < x_2$. *Đáp số:* $m < -3$

11. Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

a) $y = \frac{-x^2 + 2mx + 5}{x - 1}$ có hai cực trị nằm cùng về một phía so với đường thẳng $2x - y = 0$. *Đáp số:* $m < 3, -2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$.

b) $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$ có hai cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $x - 2y - 5 = 0$. *Đáp số:* $m = 0$