

## VẤN ĐỀ 12. HÀM SỐ DẠNG ĐA THỨC

### Dạng 1. Tiếp tuyến

1. Cho  $(C_m): y = x^3 + 1 - m(x + 1)$ . Tìm  $m$  để tiếp tuyến với  $(C_m)$  tại giao điểm của nó với trục tung, tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8. *Đáp số:*  $m = 9 \pm 4\sqrt{5}; m = -7 \pm 4\sqrt{3}$ .
2. Cho đường cong  $(C): y = x^3 - 3x + 2$ . Tìm các điểm  $M \in (C)$  sao cho  $M$  chỉ có thể vẽ được duy nhất một tiếp tuyến đến  $(C)$ . *Đáp số:*  $M(0; 2)$ .

### Dạng 2. Cực trị

3. (TSDH, khối B, 2007) Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ . Tìm  $m$  để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị cách đều gốc tọa độ. *Đáp số:*  $m = \pm \frac{1}{2}$ .
4. Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + (m - 2)x^2 + (5m + 4)x + 3m + 1$ . Tìm  $m$  để hàm số đạt cực trị tại  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1 < 2 < x_2$ . *Đáp số:*  $m < 0$ .
5. (TSDH, khối A, 2002) Cho đường cong  $(C): y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ . Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của  $(C)$ . *Đáp số:*  $y = 2x - m^2 + m$ .

### Dạng 3. Vị trí tương đối

6. (TSDH, khối D, 2009) Cho đường cong  $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m(C_m)$ . Tìm  $m$  để đường thẳng  $y = -1$  cắt  $(C_m)$  tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2. *Đáp số:*  $-\frac{1}{3} < m < 1; m \neq 0$ .
7. Cho đường cong  $y = x^3 + 3mx^2 - 3x + 3m + 2(C_m)$ . Tìm  $m$  để  $(C_m)$  cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2, x_3$  sao cho  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15$ . *Đáp số:*  $m = \pm 1$ .

### Bài tập luyện tập

8. Cho  $(C): y = x^3 - 3x + 1$ . Viết phương trình tiếp tuyến với  $(C)$  tại điểm có hoành độ  $x = 2$ . Tìm tọa độ của  $M'$  là giao điểm của tiếp tuyến này với  $(C)$ . *Đáp số:*  $y = 9x - 15; M'(-4; -51)$ .
9. (TSCĐ, khối B, 2008) Cho đường cong  $(C): y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ . Viết phương trình tiếp tuyến với  $(C)$  biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm  $M(-1; -9)$ . *Đáp số:*  $y = 24x + 15; y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$ .

10. Tìm các điểm trên trục hoành sao cho từ đó vẽ được ba tiếp tuyến đến đồ thị của  $(C): y = x^3 + 3x^2$ , trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.
11. Cho đường cong  $(C): y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ . Viết phương trình tiếp tuyến với  $(C)$  biết tiếp tuyến đi qua điểm  $M\left(0; \frac{3}{2}\right)$ . *Đáp số:*  $y = \frac{3}{2}; y = -2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}; y = 2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$ .
12. Cho hàm số  $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$ . Tìm  $m$  để hàm số đạt cực trị tại  $x_1, x_2$  sao cho  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ . *Đáp số:*  $m = 1$  và  $m = 5$ .
13. Cho đường cong bậc ba  $(C): y = 5x^3 + 7x^2 - 9x + 1$ . Viết phương trình đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu của  $(C)$ . *Đáp số:*  $y = -\frac{172}{45}x - \frac{18}{45}$ .
14. Cho hàm số  $(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ . Tìm  $m$  để khoảng cách giữa các điểm cực trị của hàm số là nhỏ nhất. *Đáp số:*  $\min_{AB} = \frac{2}{3}\sqrt{13} \Leftrightarrow m = 0$ .
15. Cho đường cong  $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$  và điểm  $I(1; 2)$ . Chứng minh rằng mọi đường thẳng qua  $I$  với hệ số góc  $k > -3$  đều cắt  $(C)$  tại ba điểm phân biệt  $A, B, I$  sao cho  $I$  là trung điểm của  $AB$ .
16. (TSDH, khối A, 2002) Cho đường cong  $(C): y = -x^3 + 3x^2$  và đường thẳng  $y = -k^3 + 3k^2$ . Tìm  $k$  để chúng cắt nhau tại ba điểm phân biệt. *Đáp số:*  $-1 < k < 3; k \neq 0; k \neq 2$ .