

VẤN ĐỀ 1. HỆ TOẠ ĐỘ, TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ CỦA ĐIỂM, TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Tự đọc SGK và trả lời các câu hỏi sau:

1. Định nghĩa hệ toạ độ Đề-các $Oxyz$ trong không gian?
2. Nêu định nghĩa và các tính chất về toạ độ của vectơ trong không gian?
3. Nêu định nghĩa và các tính chất về toạ độ của điểm trong không gian?
4. Nêu phương pháp xét tính thẳng hàng của ba điểm A, B, C trong không gian?

Dạng 1. Tìm toạ độ của vectơ

- Hệ toạ độ $Oxyz$ là hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc, trên đó lần lượt lấy ba vectơ đơn vị là $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$.
 - Trong hệ toạ độ $Oxyz$, Ox gọi là trục hoành, Oy gọi là trục tung, Oz gọi là trục cao, O gọi là gốc toạ độ.
 - Trong hệ toạ độ $Oxyz$, vectơ $\vec{u}$ gọi là có toạ độ x, y, z , kí hiệu là $\vec{u} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{u}(x; y; z)$ nếu vectơ $\vec{u}$ được viết dưới dạng $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
5. Viết toạ độ của các vectơ $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{b} = 7\vec{i} - 8\vec{k}$; $\vec{c} = -9\vec{k}$; $\vec{d} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$.
 6. Viết dưới dạng $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ các vectơ $\vec{a} = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)$; $\vec{b} = (4; -5; 0)$; $\vec{c} = \left(\frac{4}{3}; 0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\vec{d} = (0; -3; 0)$.
 - Trong hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (x; y; z)$, $\vec{v} = (x'; y'; z')$. Khi đó:
 - a) $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y'; z + z')$.
 - b) $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y'; z - z')$.
 - c) $m\vec{u} = (mx; my; mz)$.
 - d) $m\vec{u} + n\vec{v} = (mx + nx'; my + ny'; mz + nz')$.
 - e) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$.
 - g) $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$.
 7. Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$. Tìm toạ độ của các vectơ
 - a) $\vec{x} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$. Đáp số:
 - b) $\vec{y} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$. Đáp số:
 8. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{x}$ biết rằng
 - a) $\vec{a} = (0; -2; 1)$, $\vec{a} + \vec{x} = 4\vec{a}$.
 - b) $\vec{a} = (5; 4; -1)$, $\vec{b} = (2; -5; 3)$, $\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$.

Dạng 2. Tích vô hướng của hai vectơ

- Trong hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (x; y; z)$, $\vec{v} = (x'; y'; z')$. Khi đó:

$$a) \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

$$b) |\vec{u}| = \sqrt{u^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$c) \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}. \quad d) \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0.$$

9. Cho ba vector $\vec{a} = (1; -1; 1), \vec{b} = (4; 0; -1), \vec{c} = (3; 2; -1)$.

a) Tính giá trị của $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Từ đó suy ra tọa độ của vector $\vec{x} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$.

b) Tính giá trị của $\vec{c}^2$. Từ đó suy ra tọa độ của vector $\vec{y} = 3\vec{a} - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b} + \vec{c}^2 \vec{b}$.

10. Tính góc giữa hai vector $\vec{a} = (4; 3; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 2; 3)$.

Dạng 3. Tìm tọa độ của điểm trong không gian

- Trong hệ tọa độ $Oxyz$ ta định nghĩa điểm M có tọa độ là x, y, z , ký hiệu là $M(x; y; z)$ nếu $\vec{OM} = (x; y; z)$.
- Cho tọa độ hai điểm $A(x; y; z), B(x'; y'; z')$. Khi đó $\vec{AB} = (x' - x; y' - y; z' - z)$.
- Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB với $A(x; y; z), B(x'; y'; z')$ thì $x_I = \frac{x + x'}{2};$

$$y_I = \frac{y + y'}{2}; z_I = \frac{z + z'}{2}.$$

11. Cho điểm $M(2; 1; 3)$.

- Biểu diễn điểm M trong hệ tọa độ $Oxyz$.
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên các mặt phẳng tọa độ.
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên các trục tọa độ.
- Tìm tọa độ của điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ.
- Tìm tọa độ của điểm đối xứng với điểm M qua mặt phẳng Oxy .
- Tìm tọa độ của điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy .

12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), D(1; -1; 1), C'(4; 5; -5)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

Dạng 4. Xét tính thẳng hàng của ba điểm

- Để chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta làm như sau:

Bước 1: Tính hai vector $\vec{AB}; \vec{AC}$.

Bước 2: Chứng minh hai vector này không cùng phương.

13. Xét tính thẳng hàng của hai bộ ba điểm sau:

- $A(1; 3; 1), B(0; 1; 2), C(0; 0; 1);$
- $A(1; 1; 1), B(-4; 3; 1), C(-9; 5; 1).$

Dạng 5. Điểm chia đoạn thẳng theo tỷ số k

- Điểm M gọi là chia đoạn thẳng AB theo tỷ số k khi và chỉ khi $\vec{MA} = k \vec{MB}$.

- Khi điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỷ số k với $A(x; y; z), B(x'; y'; z')$ thì

$$x_M = \frac{x - kx'}{1 - k}; y_M = \frac{y - ky'}{1 - k}; z_M = \frac{z - kz'}{1 - k}.$$

14. Cho tọa độ hai điểm $A(-1; 2; 3)$ và $B(2; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho M chia đoạn thẳng AB theo tỷ số $k = -2$.
15. Cho điểm $A(2; -1; 7), B(4; 5; -2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng Oyz tại điểm M . Hỏi điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỷ số nào và tìm tọa độ điểm M .

Dạng 6. Bài toán liên quan đến tam giác

- Gọi G là trọng tâm tam giác ABC với $A(x; y; z), B(x'; y'; z'), C(x''; y''; z'')$ thì

$$x_G = \frac{x + x' + x''}{3}; y_G = \frac{y + y' + y''}{3}; z_G = \frac{z + z' + z''}{3}.$$

16. Cho ba điểm $A(1; 0; 0), B(0; 0; 1), C(2; 1; 1)$.

- Tính chu vi tam giác ABC ;
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC ;
- Tính các góc của tam giác ABC ;
- Tính diện tích của tam giác ABC ;
- Tìm tọa độ đỉnh D để tứ giác $ABDC$ là hình bình hành;
- Tính độ dài đường trung tuyến của tam giác ABC đi qua A ;
- Tính độ dài đường cao của tam giác ABC hạ từ đỉnh A ;
- Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

Dạng 7. Bài toán liên quan đến độ dài đoạn thẳng

- Cho tọa độ hai điểm $A(x; y; z), B(x'; y'; z')$. Khi đó:

$$AB = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

17. Cho điểm $A(3; 1; 0), B(-2; 4; 1)$. Tìm điểm $C \in Oy$ sao cho $CA = CB$.
18. Cho điểm $A(1; 1; 1), B(-1; 1; 0), C(3; 1; -1)$. Tìm điểm $M \in Oxz$ sao cho $MA = MB = MC$.

**ĐÁP SỐ VẤN ĐỀ 1. HỆ TOẠ ĐỘ, TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ CỦA ĐIỂM,
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN**

7. $\vec{x} = \left(11; \frac{1}{3}; \frac{55}{3}\right), \vec{y} = (0; -27; 3).$

8. a) $(0; -6; 3)$, b) $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}; 2\right).$

9. a) $(9; 6; -3)$, b) $(35; -3; -5).$

10. $\arccos \frac{5}{2\sqrt{91}}$

11. b) $(-1; 2; 0), (-1; 0; -3), (0; 2; -3)$, c) $(-1; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; -3)$, d) $(1; -2; 3)$, e) $(-1; 2; 3)$,
g) $(1; 2; 3).$

12. $C(2; 0; 2), A'(3; 5; -6), B'(4; 6; -5), D'(3; 4; -6).$

13. a) Không thẳng hàng, b) Thẳng hàng.

14. $M\left(1; 0; \frac{5}{3}\right).$

15. $k = \frac{1}{2}; M(0; -7; 16)$

16. a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$; b) $\left(1; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$; c) $A = 90^\circ, \cos B = \frac{\sqrt{10}}{5}, \cos C = \frac{\sqrt{15}}{5}$; d) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; e) $(1; 1; 2)$;

g) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; h) $\frac{\sqrt{30}}{5}$; i) $D\left(\frac{2\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}; 1\right), AD = \sqrt{\frac{12}{5+2\sqrt{6}}}.$

17. $\left(0; \frac{11}{6}; 0\right)$

18. $\left(\frac{5}{6}; 0; -\frac{7}{6}\right).$