

HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

1. Tìm m để phương trình $(m-1)x^2 + 2x + m = 0$ có ít nhất một nghiệm không âm. *Đáp số:*
 $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq m < 1.$
2. Tìm m để phương trình $2x^2 - 4x + 5(m-1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 3. *Đáp số:*
 $-\frac{1}{5} < m < \frac{7}{5}.$
3. Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + ax + bc = 0$ và x_2, x_3 là các nghiệm của phương trình $x^2 + bx + ca = 0$ trong đó $bc \neq ca$. Chứng minh rằng x_1, x_3 là các nghiệm của phương trình $x^2 + cx + ab = 0$. *Hướng dẫn:* Chứng tỏ $x_2 = c, x_1 = b, x_3 = a$.
4. Giả sử phương trình $x^2 - px + q = 0$ có hai nghiệm nguyên dương phân biệt với p, q là các số nguyên tố. Chứng minh rằng $p^2 + q^2$ là một số nguyên tố. *Hướng dẫn:* Chứng tỏ $p^2 + q^2 = 13$.
5. Giả sử phương trình $x^2 + mx + n + 1 = 0$ có x_1, x_2 là các nghiệm nguyên khác 0. Chứng minh rằng $m^2 + n^2$ là một hợp số. *Hướng dẫn:* Chứng tỏ $m^2 + n^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$.
6. Tìm các giá trị nguyên của a và b để các nghiệm của phương trình $x^2 + x + m = 0$ tương ứng là lập phương các nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$. *Đáp số:* $a = 1, b = 0$.
7. Cho a, b là các nghiệm của $x^2 + cx + d = 0$ và c, d là các nghiệm của $x^2 + ax + b = 0$ trong đó b, c, m, n là các số khác 0. Tính giá trị của $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. *Đáp số:* $P = 10$.
8. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với $a \neq 0, c \neq 0$ có nghiệm $x_1 > 0$. Chứng minh rằng phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ có nghiệm $x_2 > 0$ và $x_1 + x_2 + x_1x_2 \geq 3$. *Đáp số:*
9. Cho phương trình $2x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$. Xác định dấu của các nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1 \leq x_2$ và x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. *Đáp số:* $m = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0; 1 < m < 3 \Rightarrow x_1 < 0 < x_2; m = 3 \Rightarrow 0 = x_1 < x_2; 3 < m \leq 5 \Rightarrow 0 < x_1 < x_2$.

Luyện tập

10. a) Cho phương trình $x^2 + mx - 5 = 0$. Tìm giá trị của m để tổng bình phương các nghiệm là 11. *Đáp số:* $m = \pm 1$.
b) Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + mx + 25 = 0$. Chứng minh rằng $|x_1 + x_2| > 10$.
c) Giả sử m và n là hai nghiệm của phương trình $x^2 + mx + n = 0$ với $m \neq 0, n \neq 0$. Chứng minh rằng $|x_1x_2| = 2$. *Đáp số:* Chứng tỏ $m = 1, n = -2$.
• Phương trình bậc hai có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \Delta \geq 0; S > 0; P > 0$.

11. Cho phương trình $x^2 - 2(m+3)x + 4m - 1 = 0$.

a) Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm dương. *Đáp số:* $m > \frac{1}{4}$.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m . *Đáp số:* $2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 13$.

12. Viết phương trình bậc hai có các nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện
$$\begin{cases} 2x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) = 2 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) = k + 5 \end{cases}$$

Đáp số: $x^2 + 2kx - 3k + 1 = 0$.

• Phương trình bậc hai có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$.

13. Tìm m để phương trình

a) $2x^2 - 3(m+1)x + m^2 - m - 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu. *Đáp số:* $-1 < m < 2$.

b) $3mx^2 + 2(2m+1)x + m = 0$ có hai nghiệm âm. *Đáp số:* $m \leq -2 - \sqrt{3}, m > 0$.

c) $x^2 + mx + m - 1 = 0$ có hai nghiệm lớn hơn m . *Đáp số:* $m < -1$.

d) $mx^2 - 2(m-2)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm cùng dấu. *Đáp số:* $-1 \leq m < 0$.

14. Cho phương trình $x^2 + (4m+1)x + 2(m-4) = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_2 - x_1 = 17$. *Đáp số:* $m = \pm 4$.

b) Tìm m để biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$ có giá trị nhỏ nhất. *Đáp số:* $A = 16m^2 + 33$.

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc m . *Đáp số:* $2x_1x_2 + x_1 + x_2 = -17$.