

VẤN ĐỀ 4. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vector chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$.
2. Phương trình tổng quát của đường thẳng có dạng như thế nào?
3. Nêu cách tìm tọa độ điểm đi qua và vector chỉ phương của đường thẳng có phương trình dạng tổng quát là
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$
4. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt (x_1, y_1, z_1) và (x_2, y_2, z_2) .
5. Nêu cách chuyển phương trình đường thẳng từ dạng tổng quát sang phương trình dạng tham số và chính tắc?
6. Nêu cách chuyển phương trình đường thẳng dạng tham số hoặc chính tắc sang phương trình dạng tổng quát?
7. Nêu cách xét vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian?
8. Nêu cách xét vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng trong không gian?
9. Nêu công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng?
10. Nêu công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau?
11. Nêu công thức tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian?
12. Nêu công thức tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không gian?

Dạng 1. Viết phương trình đường thẳng dưới dạng tổng quát, tham số và chính tắc

13. Viết phương trình tham số, chính tắc, tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (-1; 3; 5)$.
14. Viết phương trình tham số, chính tắc, tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2; 3; -1), B(1; 2; 4)$. *Hướng dẫn:* Vector chỉ phương của đường thẳng $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Dạng 2. Chuyển đổi giữa các dạng khác nhau của phương trình đường thẳng

15. Chuyển phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} 2x - y + z + 5 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ sang dạng tham số và chính tắc.

Dạng 3. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và có vector chỉ phương

16. Tìm phương trình đường thẳng

a) Đi qua điểm $M(4; 3; 1)$ và song song với đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

b) Đi qua điểm $M(4; 3; 1)$ và song song với đường thẳng $d: \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$.

17. Viết phương trình đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) Đi qua điểm $A(-2;1;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$.

b) Đi qua điểm $A(-2;1;0)$ và vuông góc với hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$,

$$d_2: \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Dạng 4. Viết phương trình hình chiếu của một đường thẳng lên một mặt phẳng

18. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \begin{cases} x-2z=0 \\ 3x-2y+z-3=0 \end{cases}$ trên mặt phẳng $(P): x-2y+z+5=0$.

19. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-2;1)$ và vuông góc với đường thẳng $d: \begin{cases} 3x+2y-2z+8=0 \\ 2x-y+3z+7=0 \end{cases}$.

Dạng 5. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

20. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và $d_2: \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

b) $\Delta_1: \frac{x}{-2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-4}{0}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}$.

c) $a: \begin{cases} x=t \\ y=-8-4t \\ z=-3-3t \end{cases}$ và $b: \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}$.

Dạng 6. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

21. Xét vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng trong các trường hợp sau

a) $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và $(P): 3x+5y-z-2=0$.

b) $\Delta: \begin{cases} 2x+3y+6z-10=0 \\ x+y+z+5=0 \end{cases}$ và $(\alpha): y+4z+17=0$.

22. (ĐHCD, D, 2002) Tìm m để đường thẳng $d: \begin{cases} (2m+1)x+(1-m)y+m-1=0 \\ mx+(2m+1)z+4m+2=0 \end{cases}$ song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+2=0$.

23. (ĐHCD, D, 2003) Tìm m để đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x+3my-z+2=0 \\ mx-y+z+1=0 \end{cases}$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x-y-2z+5=0$.

Dạng 7. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

24. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

$$\text{a) } d: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ và } (P): x + y + z - 10 = 0.$$

$$\text{b) } \Delta: \begin{cases} 2x + 3y + 6z - 10 = 0 \\ x + y + z + 5 = 0 \end{cases} \text{ và } (\alpha): x - 2y + z - 3 = 0.$$

Dạng 8. Tìm góc giữa hai đường thẳng

25. Tìm góc tạo bởi các cặp đường thẳng

$$\text{a) } d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

$$\text{b) } \Delta_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{4} \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x + 3z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Dạng 9. Tìm góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

26. Tìm góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

$$\text{a) } d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases} \text{ và } (P): 2x - y + 2z - 1 = 0.$$

$$\text{b) } \Delta: \begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases} \text{ và } (\alpha): 3x - y + z - 1 = 0.$$

Dạng 10. Tìm khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

27. Tìm khoảng cách

$$\text{a) Từ điểm } M(2; 3; -1) \text{ đến đường thẳng } d: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ x + 2y + 3z + 2 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{b) Từ điểm } M(2; 3; 1) \text{ đến đường thẳng } d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}.$$

Dạng 11. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

28. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$\text{a) } d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3t \end{cases}.$$

$$\text{b) } d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2} \text{ và } d_2: \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

Dạng 12. Viết phương trình mặt phẳng chứa một điểm và một đường thẳng

29. (CĐ Kỹ thuật Hà Tây, 2002) Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$ và mặt phẳng

$$(P): x + y + z - 3 = 0.$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 0; -2)$ và chứa đường thẳng d .

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm $M(1;0;-2)$ và song song với (P) .

Dạng 13. Viết phương trình mặt phẳng chứa một đường thẳng và song song với một đường thẳng khác

30. (ĐHCD, A, 2002) Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ x+2y-2z+4=0 \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và song song với Δ_2 .

b) Tìm tọa độ điểm H trên Δ_2 sao cho đoạn MH nhỏ nhất biết rằng $M(2;1;4)$.

c) Tính khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 .

Dạng 14. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và cắt hai đường thẳng

31. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;-1;1)$ và cắt cả hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y+2z-3=0 \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=3-t \end{cases}.$$

Dạng 15. Viết phương trình đường thẳng song song với một đường thẳng và cắt hai đường thẳng khác

32. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng $a: \begin{cases} x=3t \\ y=1-t \\ z=5+t \end{cases}$ và cắt hai

$$\text{đường thẳng } b: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3} \text{ và } c: \begin{cases} x-y+4z-3=0 \\ 2x-y-z+1=0 \end{cases}.$$

Dạng 16. Viết phương trình đường thẳng nằm trong mặt phẳng và cắt hai đường thẳng cho trước

33. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(\alpha): y+2z=0$ và cắt hai đường

$$\text{thẳng } d_1: \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=4t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x=2-t \\ y=4+2t \\ z=1 \end{cases}.$$

Dạng 17. Tìm điểm đối xứng với điểm qua mặt phẳng

34. (CĐSP Trà Vinh, D, 20003) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm $A(3;-3;4)$ qua mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-7=0$.

Dạng 18. Tìm điểm đối xứng với điểm qua đường thẳng

35. (CĐSP Bến Tre, A, 2002) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm $A(1;0;-4)$ qua đường

$$\text{thẳng } d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Dạng 19. Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng, vuông góc với đường thẳng và nằm trong mặt phẳng đã cho

36. (CĐ GTVT, 2003) Cho mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 1 = 0$ và $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua giao điểm của (P) và d , vuông góc với d và nằm trên mặt phẳng (P) .

Dạng 20. Viết phương trình đường vuông góc chung giữa hai đường thẳng chéo nhau

37. (CĐ Xây dựng số 3, 2002) Cho đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ và đường thẳng $d_2: \begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = t' \end{cases}$.
- Chứng minh rằng hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.
 - Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 .
 - Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 và d_2 .
38. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(0;1;-1)$, vuông góc và cắt đường thẳng $d: \begin{cases} x + 4y - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$.
39. Lập phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (Oxz) và cắt hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -4 + t \\ z = 3 - t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$.
40. Viết phương trình đường thẳng qua điểm $A(0;1;1)$, vuông góc với đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ và cắt đường thẳng $d_2: \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$.
41. (CĐSP, B, 2002) Cho điểm $A(0;1;0), B(2;3;1), C(-2;2;2), D(1;-1;2)$.
- Chứng minh rằng các tam giác ABC, ABD và ADC là những tam giác vuông.
 - Tính thể tích tứ diện $ABCD$.
 - Viết phương trình đường thẳng AH trong đó H là trực tâm của tam giác BCD .
42. Cho hai điểm $M(1;2;-1), N(7;-2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$.
- Chứng minh rằng hai đường thẳng d và MN đồng phẳng.
 - Tìm tọa độ điểm I trên đường thẳng d sao cho tổng $(IM + IN)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
43. Cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - 4y + z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1, -1, 2), B(3, 0, 1)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (α) sao cho $MA + MB$ bé nhất.
44. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$ và hai điểm $A(1;2;3), B(3;5;7)$. Tìm điểm M trên đường thẳng Δ sao cho $|MA - MB|$ bé nhất.

ĐÁP SỐ VẤN ĐỀ 4. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

13. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{5}$
14. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{5}$
15. $\frac{x}{1} = \frac{y-8}{4} = \frac{z-3}{2}$
- 16a. $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{2}$
- 16b. $\frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z-1}{-3}$
- 17a. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$
- 17b. $\frac{x-2}{-4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$
18. $\begin{cases} 11x-2y-15z-3=0 \\ x-2y+z+5=0 \end{cases}$
19. $4x-13y-7z-31=0$
- 20a. cắt nhau
- 20b. chéo nhau
- 20c. song song
- 21a. cắt nhau
- 21b. song song
22. $m = -\frac{1}{2}$
23. $m = 1$
- 24a. $(6; -2; 6)$
- 24b. $\left(-8; -\frac{8}{3}; \frac{17}{3}\right)$
- 25a. $\cos \alpha = \frac{9}{\sqrt{294}}$
- 25b. $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{2002}}$
- 26a. $\sin \alpha = \frac{1}{3\sqrt{14}}$
- 26b. $\sin \alpha = \frac{6}{\sqrt{462}}$
- 27a. $\sqrt{\frac{205}{14}}$
- 27b. $\frac{10\sqrt{2}}{3}$
- 28a. 0
- 28b. $\frac{\sqrt{386}}{3}$
- 29a. $3x+4y-3z-9=0$
- 29b. $x+y+z+1=0$
- 30a. $2x-z=0$
- 30b. $(2; 3; 3)$
- 30c. $d = \frac{\sqrt{5}}{5}$
31. $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 3x-4y+2z-9=0 \end{cases}$
32. $\begin{cases} 7x+8y-13z+35=0 \\ 5x-y-16z+13=0 \end{cases}$
33. $x=1+4t, y=-2t, z=t$
34. $A'(-1; 1; 2)$
35. $A'\left(\frac{-1}{3}; \frac{16}{3}; \frac{16}{3}\right)$
36. $\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ 2x+y-3z-15=0 \end{cases}$
- 37b. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 37c. $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$
38. $\frac{x}{13} = \frac{y-1}{-28} = \frac{z+1}{20}$
39. $\begin{cases} x+z-3=0 \\ 5x-2z+3=0 \end{cases}$
40. $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 3x+y+z-2=0 \end{cases}$
- 41b. $\frac{27}{6}$
- 41c. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{5}$
42. $I(2; 0; 4)$