

## PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

### Dạng 1. Phương trình tiếp tuyến tại một điểm

- Phương trình tiếp tuyến tại  $M(x_0; y_0)$  thuộc  $(C): y = f(x)$  có dạng  $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ .

1. Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 2$  có đồ thị  $(C)$ . Viết phương trình tiếp của  $(C)$  biết

- Tiếp điểm có hoành độ  $x_0 = -1$ . *Đáp số:*  $y = -3x - 3$ .
- Tiếp điểm có tung độ  $y_0 = 2$ . *Đáp số:*  $y = 2, y = 9x - 7$ .
- Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất. *Đáp số:*  $y = -3x - 3$ .

### Dạng 2. Phương trình tiếp qua một điểm

- Để lập phương trình tiếp tuyến của hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C)$  đi qua điểm  $A(x_A; y_A)$ , ta có hai cách:

*Cách 1: Bước 1:* Gọi tiếp điểm là  $M(x_0; f(x_0)) \Rightarrow$  Phương trình tiếp tuyến tại  $M$  là  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

*Bước 2:* Vì điểm tiếp tuyến đi qua điểm  $A(x_A; y_A)$  nên  $y_A = f'(x_0)(x_A - x_0) + f(x_0)$ .

*Bước 3:* Từ đó tìm được  $x_0$  và suy ra được phương trình tiếp tuyến.

- *Chú ý:* Đồ thị hai hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  tiếp xúc nhau  $\Leftrightarrow$  hệ  $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$  có nghiệm.

*Cách 2: Bước 1:* Gọi đường thẳng qua điểm  $A$  là  $d: y = k(x - x_A) + y_A$ .

*Bước 2:*  $d$  là tiếp tuyến của  $(C) \Leftrightarrow$  hệ sau có nghiệm  $\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$

*Bước 3:* Thay (2) vào (1)  $\Rightarrow x \Rightarrow k \Rightarrow$  Phương trình tiếp tuyến.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$ , biết tiếp tuyến đi qua điểm  $A(-1; 4)$ .

*Đáp số:*  $y = 4; y = -\frac{9}{4}x + \frac{7}{4}$ .

### Dạng 3. Phương trình tiếp tuyến có hệ số góc cho trước

- Để lập phương trình tiếp tuyến của hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C)$  có hệ số góc  $k$ , ta có hai cách:

*Cách 1: Bước 1:* Gọi tiếp điểm là  $M(x_0; f(x_0))$ . Suy ra  $f'(x_0) = k$ .

*Bước 2:* Từ đó ta tìm được  $x_0$ .

*Bước 3:* Áp dụng dạng 1 ta tìm được tiếp tuyến.

*Cách 2: Bước 1:* Gọi đường thẳng có hệ số góc  $k$  là  $d: y = kx + b$ .

*Bước 2:* Để  $d$  là tiếp tuyến của  $(C)$  thì hệ sau có nghiệm  $\begin{cases} f(x) = kx + b & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$

*Bước 3:* Từ (2)  $\Rightarrow x$ . Thay vào (1) suy ra  $b$ . Từ đó viết được phương trình tiếp tuyến.

*Chú ý:* Cho đường thẳng  $\Delta: ax + by + c = 0, (a^2 + b^2 \neq 0)$ . Khi đó

- Nếu  $d$  song song với  $\Delta$  thì  $d$  có dạng  $d: ax + by + m = 0, (m \neq c)$ .

• Nếu  $d$  vuông góc với  $\Delta$  thì  $d$  có dạng  $d: bx - ay + m = 0$ .

3. Cho hàm số  $y = \frac{3x-2}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$ . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị  $(C)$  biết rằng tiếp tuyến song song với  $\Delta: x + y - 3 = 0$ . *Đáp số:*  $y = -x + 6, y = -x + 2$ .

**Dạng 4. Hai đường cong tiếp xúc nhau**

4. Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 - x^2 + 5$  và đồ thị hàm số  $y = 2x^2 + m$  tiếp xúc nhau. Xác định tọa độ của tiếp điểm. *Đáp số:*  $m = 1: A(2; 9); m = 5: B(0; 5)$ .
5. Tìm  $a, b$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{ax+b}{x-1}$  đi qua điểm  $A(3; 1)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $2x - y - 4 = 0$ . *Đáp số:*  $a = 10, b = -28$  hoặc  $a = 2; b = -4$ .

**Dạng 5. Bài tập nâng cao về tiếp tuyến**

6. Tìm trên trục tung những điểm mà từ đó có thể kẻ được 3 tiếp tuyến tới đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2$ . *Đáp số:* Gọi  $A(0; a) \in Oy \Rightarrow 0 < a < 1$ .
7. Cho đồ thị hàm số  $(C): y = x - \frac{1}{x+1}$ .
- a) Chứng minh rằng trên  $(C)$  tồn tại vô số những cặp điểm mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau.
- b) Tìm  $m$  để  $d: y = m$  cắt  $(C)$  tại  $A, B$  sao cho  $OA$  vuông góc với  $OB$ . *Đs:*  $m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .
8. (TSDH, A, 09) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số  $y = \frac{x+2}{2x+3}$ , biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho tam giác  $OAB$  cân tại gốc tọa độ  $O$ . *Hd:* Gọi  $M(x_0; y_0)$  là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. *Đs:*  $y = -x - 2$ .

**Bài tập luyện tập**

9. Cho hàm số  $y = \frac{3x-2}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$ . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị  $(C)$  biết rằng tiếp tuyến vuông góc với  $\Delta: 4x - y - 7 = 0$ . *Đáp số:*  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{17}{4}, y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$ .
10. Tìm  $m$  để hai đường cong  $y = \frac{mx-1}{x}$  và  $y = 4x^2 + 1$  tiếp xúc nhau. *Đáp số:*  $m = 4: M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ .
11. Tìm  $a$  để hai đường cong  $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$  và  $y = -x^2 + a$  tiếp xúc nhau. *Đáp số:*  $a = 2: M(0; 2)$ .
12. (ĐHSP HN II, khối A và B, 99) Tìm trên trục  $Ox$  các điểm từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số  $y = -x^3 + 3x + 2$ . *Đáp số:*  $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty) \setminus \{-1\}$ .
13. Tìm những điểm trên đường thẳng  $y = 1$  sao cho từ đó có thể kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị hàm số  $(C): y = \frac{2x^2 + x}{x+1}$ . *Đáp số:*  $a = \pm 1, a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .
14. Cho đồ thị hàm số  $(C): y = \frac{x-3}{x+1}$ . Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  biết khoảng cách từ tâm đối xứng của  $(C)$  đến tiếp tuyến bằng  $2\sqrt{2}$ .