

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ xác định trên D nếu

$$\begin{cases} \forall x \in D : f(x) \leq M \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases} \cdot \text{Kí hiệu là } \max_{x \in D} f(x) = M = f(x_0).$$

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} \forall x \in D : f(x) \geq m \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$. Kí hiệu là $\min_{x \in D} f(x) = m = f(x_0)$.

- Phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Cách 2: Sử dụng bảng biến thiên.

- Ngoài ra, nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ ta có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất như sau:

Bước 1: Tìm các nghiệm $x_1; x_2; \dots; x_n$ của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $[a; b]$.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$. Từ đó rút ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) (TN, 10) $y = x^4 - 8x^2 + 5$ trên $[-1; 3]$. Đs: $\min_{[-1; 3]} f(x) = f(2) = -11$; $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(3) = 14$.

b) (TN, 09) $y = \frac{2x+1}{1-x}$ trên $[2; 4]$. Đs: $\min_{[2; 4]} f(x) = f(2) = -5$; $\max_{[2; 4]} f(x) = f(4) = -3$.

c) (TN, 08) $y = \frac{x^2+9}{x}$ trên $[2; 4]$. Đs: $\min_{[2; 4]} f(x) = f(3) = 6$; $\max_{[2; 4]} f(x) = f(2) = \frac{13}{2}$.

d) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-x}$. Đs: $\min y = y(5) = 2\sqrt{3}$; $\max y = y(2) = y(8) = \sqrt{6}$.

e) $y = |x^2 - 3x + 2|$ trên $[-1; 3]$.

2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Đs: $\max y = y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\min y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

b) (TN THPT 2008) $y = x + \sqrt{2} \cos x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Đs: $\max y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + 1$;
 $\min y = y(0) = \sqrt{2}$.

c) (TN THPT 2003) $y = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x$ trên đoạn $[0; \pi]$. Đs: $\min y = 0$; $\max y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

d) $y = \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x + \cos x + 1}$.

e) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$ bằng nhiều cách. Ds: $\max y = 3 + 2\sqrt{2}$; $\min y = 3 - 2\sqrt{2}$.

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số

a) $y = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ trên khoảng $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. Ds: $\max_{x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)} y = y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

b) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$. Ds: $\max y = y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, $\min y = y(-2) = -2$.

c) $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên $[-1; 1]$. Ds: $\max y = y(-1) = 3$, $\min y = y(1) = 1$.

d) $y = x + \frac{1}{x} - 5$ trên $(0; +\infty)$. Ds: $\min y = y(1) = -3$, không tồn tại $\max y$.

e) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 2}$ trên $[0; 3]$. Ds: $\min y = y(2) = 0$, $\max y = y(0) = 2$.

4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số

a) $y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$.

b) $y = 5 \cos x - \cos 5x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Ds: $\max y = y\left(\pm \frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$; $\min y = y(0) = 4$.

c) $y = 3 \cos 3x + 2 \cos 2x + 9 \cos x + 2$. Ds: $\min y = -8$; $\max y = 16$.

d) $y = \sqrt{\cos^2 x - 2 \cos x + 5} + \sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 8}$. Ds: $\max y = y(k2\pi) = 2 + \sqrt{13}$;
 $\min y = y\left(\pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = 5$.

5. a) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0$. Tìm m để biểu

thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Ds: $\max A = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ đạt được khi

$m = 2\sqrt{3}$; $\min A = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$ đạt được khi $m = -2\sqrt{3}$.

b) Giả sử $(x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = 6 - a^2 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = xy + 2(x + y)$. Ds: $\min F = -4$ đạt được khi $a = -1$.