

TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

- Đường thẳng $y = y_0$ gọi là *tiệm cận ngang* của hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$

- Đường thẳng $x = x_0$ gọi là *tiệm cận đứng* của hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$$

- Đường thẳng $y = ax + b (a \neq 0)$ gọi là *tiệm cận xiên* của hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

- Để xác định các số a, b trong phương trình tiệm cận xiên, ta có thể áp dụng công thức:

$$* \text{ Tìm } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

$$* \text{ Tìm } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax].$$

$$\text{Hoặc: } * \text{ Tìm } a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

$$* \text{ Tìm } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax].$$

1. Tìm các tiệm cận đứng và ngang (nếu có) của các hàm số

$$a) y = \frac{x-1}{x+2}.$$

$$b) y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}.$$

$$c) y = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$d) y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1.$$

$$e) y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$g) y = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + 3x + 2}{2x + 2}.$$

2. Tìm các tiệm cận đứng và xiên (nếu có) của các hàm số

$$a) y = 2x - 1 + \frac{2}{x-1}.$$

$$b) y = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}.$$

$$c) y = \frac{x^2 + x + \sin x}{x}.$$

$$d) y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 1}.$$

$$e) y = \sqrt{x^2 - 4x} + 5x.$$

$$g) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3. Tìm các tiệm cận xiên của các hàm số

$$a) y = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}. \text{ Ds: } y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}.$$

$$b) y = \sqrt{x^2 - 1}. \text{ Ds: } y = \pm x.$$

$$c) y = \sqrt{2x^2 - 6x + 4}. \text{ Ds: } y = \pm \sqrt{2} \left(x - \frac{3}{2} \right).$$

$$4. \text{ Cho } (C_m): y = \frac{2x^2 + (m+1)x - 3}{x+m}.$$

a) Tìm m để tiệm cận xiên của (C_m) đi qua $A(1;1)$.

b) Tìm m để giao của hai tiệm cận của (C_m) nằm trên $(P): y = x^2 + 3$.

5. (TSDH, A, 2005) Tìm m để hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu đến tiệm cận xiên của đồ thị hàm số bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Đs: $m = 1$.
6. Cho $(C): y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 3}$. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ điểm M trên (C) đến hai tiệm cận của (C) bằng một hằng số.
7. Tìm tất cả các điểm M trên đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận nhỏ nhất.
8. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m+2)x - m}{x + 1}, (C_m)$. Tìm m để tiệm cận của (C_m) định trên hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8.