

VẤN ĐỀ 3. HÀM SỐ BẬC HAI

1. Cho hàm số $(P_m): y = f(x; m) = x^2 - mx + m - 2$.

a) Tìm phương trình đồ thị của parabol (P) của hàm số đã cho sao cho (P_m) đi qua điểm $A(2;1)$. *Đáp số:* $m = 1$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của (P) .

c) Từ đồ thị (P) , hãy suy ra các đồ thị $(P_1): y = f(|x|); (P_2): y = |f(x)|; (P_3): y = f(|x|);$

$$(P_4): |y| = f(x); (P_5): y = \left| x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right).$$

d) Biện luận số nghiệm của phương trình $|x^2 - |x| - 1| - 3m + 2 = 0$ theo tham số m .

e) Lập bảng biến thiên của hàm số (P_m) . Từ đó tìm giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của $y = f(x; m)$ đạt giá trị lớn nhất.

g) Tìm điểm cố định của đồ thị (P_m) và tìm quỹ tích đỉnh của parabol (P_m) khi m thay đổi.

h) Tìm phương trình của đồ thị của (P_m) sau khi thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến (P_m) sang trái 3 đơn vị và lên trên 2 đơn vị.

i) Tìm phương trình của đồ thị của (P_m) sau khi thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến (P_m) sang phải 2 đơn vị và xuống dưới 3 đơn vị.

k) Tùy theo m , tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của (P_m) trên đoạn $[-1; 2]$.

l) Tìm m để đường thẳng $(d_m): y = \left(m + \frac{7}{2}\right)x + 4 - 2m$ cắt (P_m) tại hai điểm phân biệt A, B . Từ đó tìm quỹ tích trung điểm I của AB khi m thay đổi.

2. Vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của mỗi hàm số sau đây:

$$a) y = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & (x \geq 1) \\ x + 1 & (x < 1) \end{cases}$$

$$b) y = \begin{cases} -x^2 + 3x & (x \geq 0) \\ x^2 + x & (x < 0) \end{cases}$$

$$c) y = x|x| + x.$$

$$d) y = -x^2 + 2|x| + 3.$$

$$e) y = x^2 - 2|x - 1| + 2.$$

$$g) y = |x + 1|(x - 3).$$

$$h) y = (|x| - 1)^2 - 2.$$

$$k) y = (|x| - 1)(|x| - 3).$$

3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c (P)$. Tính a, b, c trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) đi qua 3 điểm $A(-1; -2), B(1; 2), C(2; 1)$. *Đáp số:* $a = -1; b = 2; c = 1$.

b) (P) có đỉnh $S(2; -2)$ và đi qua $A(4; 2)$. *Đáp số:* $a = 1; b = -4; c = 2$.

c) (P) có đỉnh là $I(-1; 2)$ và đi qua gốc tọa độ. *Đáp số:* $y = -2x^2 - 4x$.

d) (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ 2 và đi qua hai điểm $A(1; 5), B(-2; 8)$. *Đáp số:* $y = 2x^2 + x + 2$.

- e) (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ 2 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ 1 và 2. *Đáp số:* $y = x^2 - 3x + 2$.
4. Cho parabol $y = x^2 - 2x$ và hai đường thẳng $(d_1): y = x, (d_2): y = 2x + m$.
- a) Tìm tọa độ điểm chung của hai đồ thị (P) và $(d_1): y = x$. *Đáp số:* $O(0;0), A(3;3)$.
- b) Xác định giá trị m để (P) và (d_2) có một điểm chung duy nhất. *Đáp số:* $m = -4; (2;0)$.
5. a) Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ và đường thẳng song song với trục hoành, cắt (P) tại hai điểm A, B . Chứng minh rằng trung điểm của AB thuộc trục đối xứng của (P) .
- b) Một đường thẳng song song với trục hoành, cắt đồ thị (P) của một hàm số bậc hai tại hai điểm $M(-2;1), N(3;1)$. Hãy cho biết phương trình trục đối xứng của (P) .
6. Cho parabol $(P): y = x^2 + 2x$ và đường thẳng $(d): y = -2x + m$.
- a) Xác định giá trị của m sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm tọa độ trung điểm I của AB . Chứng minh rằng điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định. *Đs:* $m > -4; I(-2; m+4), \Delta: x+2=0$.
- b) Định m sao cho (d) cắt (P) có một điểm chung nhất. Tìm tọa độ điểm chung này. *Đs:* $m = -4; I(-2;0)$.
7. Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị (P_0) . Hãy xác định các phép tịnh tiến song song với trục tọa độ biến đổi (P_0) thành đồ thị của hàm số sau đây:
- a) $y = 2(x+2)^2 - 3$. *Đáp số:* Qua trái 2 đơn vị rồi đi xuống 3 đơn vị.
- b) $y = 2(x-3)^2 + 1$. *Đáp số:* Qua phải 3 đơn vị rồi đi lên một đơn vị.
8. Cho hai hàm số bậc hai $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (P_1) và (P_2) . Hãy tìm tọa độ đỉnh của (P_1) và (P_2) rồi suy ra phép tịnh tiến song song với các trục tọa độ để biến đổi (P_1) thành (P_2) . Vẽ (P_1) và (P_2) trong cùng một hệ trục tọa độ
- a) $(P_1): y = f(x) = 2x^2 - 6x + 1; (P_2): y = g(x) = 2x^2 + 3$.
- b) $(P_1): y = f(x) = x^2 - 2x + 3; (P_2): y = g(x) = x^2 + 4x + 1$.
- c) $(P_1): y = f(x) = -x^2 + 2x - 1; (P_2): y = g(x) = -x^2 + 4x + 2$.
- d) $(P_1): y = f(x) = x^2 + 4x; (P_2): y = g(x) = x^2 - 2x + 2$.