

VẤN ĐỀ 10. BẤT ĐẲNG THỨC

Dạng 1. Chứng minh bất đẳng thức bằng định nghĩa

Chứng minh rằng:

1. a) $a^2 + 2b^2 + 2ab + b + 10 > 0, \forall a, b.$ b) $a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 14 > 2a + 12b + 6c.$
2. a) Nếu $a + b \geq 0$ thì $ab(a + b) \leq a^3 + b^3.$ b) Nếu $a + b \geq 0$ thì $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^3.$
c) Nếu $a > 0, b > 0$ thì $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$ d) Nếu $a + b \geq 0, a \neq 0, b \neq 0$ thì $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$
3. a) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e), \forall a, b, c, d, e.$
b) Nếu $a + b + c \geq 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$ Hướng dẫn: Chứng tỏ rằng $H = (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$
4. a) $1 + 2a^4 \geq a^2 + 2a^3, \forall a.$ b) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3, \forall a, b.$
c) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2, \forall a, b, c.$ d) Nếu $a < b < c$ thì $a^2b + b^2c + c^2a < a^2c + b^2a + c^2b.$

Dạng 2. Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương

5. a) Cho 3 số a, b, c bất kỳ, chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$
b) Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1.$ Chứng minh rằng $-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1.$
Hướng dẫn: Phải chứng minh $-\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \leq ab + bc + ca \leq 1(a^2 + b^2 + c^2).$
c) Biết $a > 0, b > 0, c > 0.$ Chứng minh rằng $\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$
6. a) Cho bốn số a, b, c, d tùy ý. Chứng minh rằng $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$
b) Chứng minh rằng $\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}, \forall a, b, c, d.$
7. (Đại học – A – 1980) Cho $a > c, b > c, c > 0.$ Chứng minh rằng $\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leq \sqrt{ab}.$
Hướng dẫn: Bình phương hai vế để đưa bất đẳng về dạng $(c - \sqrt{(a - c)(b - c)})^2 \geq 0.$
8. a) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$ với mọi a, b, c dương.

b) Cho a, b, c thuộc $[0; 1]$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$.

Hướng dẫn: Sử dụng $0 \leq (1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2)$.

9. a) Cho hai số dương x, y thỏa mãn $xy \leq 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \leq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$.

b) Áp dụng chứng minh rằng nếu $0 < x \leq 1, 0 \leq y < 1, 0 < z \leq 1$ thì $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \leq \frac{3}{1+xyz}$.

10. a) Cho $z \geq y \geq x > 0$. Chứng minh rằng $y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{y}(x+z) \leq (x+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)$.

b) Cho $|a| < 1, |b| < 1$. Chứng minh rằng $|a+b| < |1+ab|$.

Dạng 3. Sử dụng các bất đẳng thức đã biết

Chứng minh rằng (1 – 6):

11. a) Nếu $a, b, c, d \geq 0$ thì $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$. b) Nếu $a, b, c > 0$ thì $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.

c) $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$, với $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

d) Nếu $a \geq 1, b \geq 1$ thì $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$.

12. a) Nếu các số a, b thỏa mãn $3a + 4b = 7$ thì $3a^2 + 4b^2 \geq 7$.

b) Nếu các số x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ thì $|2x - 3y + 4z| \leq 3\sqrt{29}$.

c) Cho $a + b = 2$. Chứng minh rằng $a^4 + b^4 \geq 2$.

d) Nếu a, b, c, x, y, z dương và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$ thì $x + y + z \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$.

13. a) Nếu a và b là hai số dương thì $a + b \geq \frac{4ab}{1+ab}$.

b) Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ và thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ thì $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$.

c) Nếu $a > b > 0$ thì $a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3$.

d) $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2, \forall a \geq 0, b \geq 0$.

14. a) Nếu a, b, c là ba số dương và $a + b + c = 1$ thì $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right) \geq 64$.

b) (ĐHBKHN, 1990) Nếu a, b, c là các số dương thì $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$.

15. a) Nếu $2x + 3y = 5$ thì $2x^2 + 3y^2 \geq 5$. b) Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì $|3x + 4y| \leq 5$.

16. a) Nếu x, y, z, p, q là các số dương thì $\frac{x}{py + qz} + \frac{y}{pz + qx} + \frac{z}{px + qy} \geq \frac{3}{p + q}$.

b) Nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$.

Dạng 4. Áp dụng bất đẳng thức để tìm min, max

17. a) Tìm max của $A = x(1 - 2x)$ với $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Đáp số: $A_{\max} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

b) Tìm min của $B = 3x + \frac{1}{x-2}$, ($x > 2$). Đáp số: $B_{\min} = 6 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Với $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1$, tìm max của $C = (3-x)(1-y)(4x+7y)$. Đáp số: $C_{\max} = \frac{1}{8}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{17}{12}, y = \frac{2}{21}$.

18. a) (Đề 115.II) Cho $xy + yz + zx = 4$. Tìm min của $F = x^4 + y^4 + z^4$.

b) Cho $a \geq 3, b \geq 4, c \geq 2$. Tìm max của $f = \frac{ab\sqrt{c-2} + bc\sqrt{a-3} + ca\sqrt{b-4}}{abc}$.

19. a) Tìm min của $M = 5x + \frac{1}{x-3}$ với $x > 3$.

b) Tìm max của $N = x(1 - 3x)$ với $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$.

c) Với $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1$, tìm min của $P = (5-x)(3-y)(1-z)(x+2y+5z)$.

20. a) (Đề 73. III) Cho $36x^2 + 16y^2 = 9$. Tìm max và min của $A = y - 2x + 5$.

b) (Đề 53. III) Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm max của $A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$.

21. (Đề 94. II) Cho $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ u^2 + v^2 = 25 \\ xu + yv \geq 20. \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của $u + v$.