TRƯỜNG HÀ NỘI - AMSTERDAM
TỔ TOÁN – TIN

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC KỲ II NĂM HỌC 2011 – 2012
Môn Toán; Lớp 12

Bài 1: ***(2,5 điểm)***

a) $y = x^3 + 3x^2 - 4$

* Tập xác định: R.

* Sự biến thiên

- Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty.$

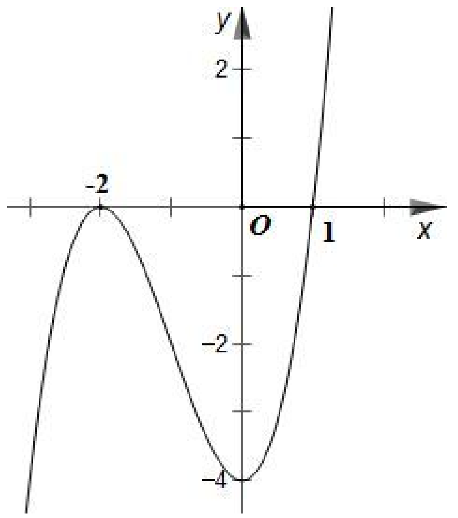
- Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -4 \\ x = -2 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	-	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2),(0;+\infty)$; hàm số nghịch biến trong khoảng $(-2;0)$. Hàm số có điểm đại là $(-2;0)$, cực tiểu là $(0;-4)$.

* Đồ thị:



- Nhận xét: đồ thị nhận điểm uốn $I(-1;-2)$ làm tâm đối xứng.

b) Gọi $A(x_0;y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = x_0^3 + 3x_0^2 - 4 \ (1).$

Gọi *B* đối xứng với *A* qua *O* thì $B(-x_0;-y_0)$ với $x_0 \neq 0.$

Ta có $B \in (C) \Leftrightarrow -y_0 = -x_0^3 + 3x_0^2 - 4 \ (2).$

Từ (1) và (2) suy ra: $6x_0^2-8=0\Leftrightarrow x_0=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Với $x_0=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y_0=\pm\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

Vậy hai cặp điểm $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ và $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};-\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Bài 2: ***(2,5 điểm)***

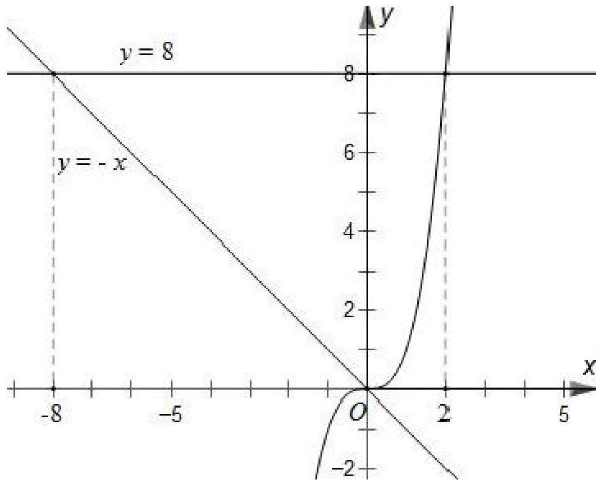
a) Đặt $x=\sin t$. Vì $x\in[0;1]$ nên $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Ta có $dx=\cos tdt$.

Đổi cận : Với $x=0\Rightarrow t=0$, với $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Ta có : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt$

$=\frac{1}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}$.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $(d_1): x+y=0$; $(d_2): y=8$ và đường cong $(C): y=x^3$.



Ta có

+ (d_1) cắt (d_2) tại $A(-8;8)$.

+ (d_1) cắt (C) tại $O(0;0)$.

+ (d_2) cắt (C) tại $B(2;8)$.

Vậy diện tích hình phẳng là :

$S=\frac{1}{2}.8.8+\int_0^2(8-x^3)dx=32+\left(8x-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2$

$=32+12=44(dvdt)$

Bài 3: ***(3 điểm)***

a) * Ta có (d_1) đi qua $M(0;2;0)$ và có VTCP là $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;1)$.

(d_2) đi qua $N(1;2;1)$ và có VTCP là $\overrightarrow{u_2}=(-2;1;4)$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(1;0;1)$ và $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(-9;-6;-3)\Rightarrow\overrightarrow{MN}.\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=-12\neq 0$.

Do đó (d_1), (d_2) chéo nhau.

* Ta có $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0\Rightarrow(d_1),(d_2)$ vuông góc nhau.

b) Ta có mặt phẳng (P) đi qua M và nhận $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(-9;-6;-3)=-3(3;2;1)$ làm VTPT.

Do đó, phương trình mặt phẳng (P) là :

$$3(x-0)+2(y-2)+(z-0)=0 \text{ hay } 3x+2y+z-4=0.$$

c) Gọi $A(a;-2a+2;a)\in(d_1)$ và $B(-2b+1;b+2;4b+1)\in(d_2)$ từ đó suy ra $\overrightarrow{AB}=(-a-2b+1;2a+b;-a+4b+1)$.

AB nhỏ nhất khi nó là đoạn vuông góc chung của $(d_1),(d_2)$. Khi đó:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a-2b+1-2(2a+b)-a+4b+1=0\\ -2(-a-2b+1)+(2a+b)+4(-a+4b+1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-6a+2=0\\ 21b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\Rightarrow A\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right)\\ b=-\dfrac{2}{21}\Rightarrow B\left(\dfrac{25}{21};\dfrac{40}{21};\dfrac{13}{21}\right)\end{cases}$$

Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I\left(\dfrac{16}{21};\dfrac{34}{21};\dfrac{10}{21}\right),R=\dfrac{\sqrt{9^2+6^2+3^2}}{21}=\dfrac{\sqrt{126}}{21}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):\left(x-\dfrac{16}{21}\right)^2+\left(y-\dfrac{34}{21}\right)^2+\left(z-\dfrac{10}{21}\right)^2=\dfrac{126}{441}$.

Bài 4 : ***(2 điểm)***

a) Ta có

$$\log_5\left(\frac{1}{4}.2^x+1\right)+\log_{\frac{1}{5}}\left(4^x+144\right)+1>2\log_{\frac{1}{5}}4.$$

$$\Leftrightarrow\log_5\left(\frac{1}{4}.2^x+1\right)+\log_5 16+\log_5 5>\log_5\left(4^x+144\right)$$

$$\Leftrightarrow 80\left(\frac{1}{4}2^x+1\right)>4^x+144\Leftrightarrow 4^x-20.2^x+64<0\Leftrightarrow 4<2^x<16\Leftrightarrow 2<x<4.$$

b) Gọi $z=x+yi$. Ta có : $|z-i-2|=\sqrt{10}\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-1)^2=10\ (1)$.

Ta có $z.\overline{z}=25\Leftrightarrow x^2+y^2=25\ (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $(x;y)=(3;4)$ hoặc $(5;0)$.

Vậy $z=3+4i$ hoặc $z=5+0i$.

---------- **Hết** ----------